

QED 노벨상 수상 50주년 기념

QED 양자장론과 파인만 다이어그램

DOI: 10.3938/PhiT.24.023

민현수·박동수

Quantum Electrodynamics and Feynman Diagrams

Hyunsoo MIN and Dongsu BAK

In this article, we describe the basic ingredients of quantum electrodynamics (QED), including the Feynman diagrams describing the interactions of electrons and positrons through the exchange of photons. The propagation of photons describes the phenomena of electromagnetism.

본 글은 QED의 기본 내용과 QED의 섭동 계산의 가장 주요한 방법론인 파인만 도형에 대하여 간략히 소개하는 것을 목적으로 한다. QED는 기본적으로 양자장 이론으로서 광양자를 기술하는 전자기장이론 그리고 전자나 그 반입자인 양전자의 역학을 기술하는 디랙장 부분과 그리고 이들 사이의 상호작용을 기술하는 부분으로 구성되어 있다.

전자기장과 광양자

전자기 현상은 네 가지의 기본 상호작용 중 중력과 함께 우리의 일상생활을 지배하는 상호작용이다. 잘 알려진 바와 같이 전자기장과 자기장의 공간과 시간의 변화로 기술되며 이는 맥스웰의 네 가지 방정식으로 종합된다. 첫째 식은 소위 쿨롱의 법칙으로 전기 전하가 전기장을 발생하는 것, 둘째는 자기 홀극이 존재하지 않음을 기술한다. 셋째는 자기장의 변화에 따라

전자장과 그에 따른 기전력이 생겨난다는 패러데이의 법칙이며 그리고 마지막은 전류와 전기장의 시간 변화를 따라 어떻게 자기장이 생겨나는가를 기술한다. 관련된 중요한 특성을 요약하자면 다음과 같다. 첫째 전자기 현상은 전기장이나 자기장에 의하여 기술되고 이들 양은 시공간 좌표 (ct, x, y, z) ¹⁾의 함수로 주어지며 이러한 시공간 좌표의 함수로 주어지는 물리량을 장이라고 지칭한다. 이러한 기본 물리량이 시간과 공간의 함수인 장으로 주어지는 시스템이 장물리 계이다. 이러한 장은 기본적으로 시공간 각 점마다 독립적인 자유도를 가지므로 공간에 연속적으로 분포한 무한대로 많은 자유도를 기술하는 특성을 가지고 있다. 따라서 아래에 재규격화 문제를 다룰 때 좀더 자세히 기술하겠지만 양자화가 무한대 문제를 동반하는 특성을 가지고 있다. 둘째 전하나 전류가 없는 상황에서 위의 맥스웰 방정식은 전자기파의 자유공간 전파를 기술한다는 점이다. 이러한 전자기파의 일부가 가시광선이며 위에 나타난 c 는 빛의 속도를 나타낸다. 특히 빛의 속도는 임의의 관성계에서 일정하다는 점이 소위 아인슈타인의 상대성이론의 기본 원리로 작용하고 있다. 상대성이론은 어떤 역학적 시스템이 로런츠 변환에 대하여 대칭성을 가지는 것으로 요약된다. 그러므로 빛을 다루는 전자기 현상은 본질적으로 상대론적인 기술이 요구된다. 따라서 우리의 주요 주제인 QED 이론은 상대성이론과 양자역학의 통합을 기본적으로 요구하고 있다. 또한 전자기장을 기술해야 하므로 기본적으로 장이론의 틀 내에서 시스템을 기술하는 것이 요구되는데 이것이 바로 상대론적 양자장이론(relativistic quantum field theory)이다. 셋째 위의 둘째와 셋째의 방정식의 일반해로서 게이지 퍼텐셜을 도입할 수 있는데 이때 전자기장과 자기장은 각각 게이지장(gauge field)을 이용하여 표현할 수 있다. 고전적으로는 전기장이나 자기장을 이용한 기술로 충분하지만 양자역학적으로는 게이지장이 전자기장만으로 기술할 수 없는 추가적인 물리 정보를 포함한다는 점이 잘

저자약력

민현수 교수는 서울대학교 물리학과 박사(1984)로서, 현재 서울시립대학교 물리학과 교수로 재직 중이며 양자장이론을 연구하고 있다.
(hsmin@uos.ac.kr)

박동수 교수는 Massachusetts Institute of Technology 물리학과 박사(1995)로서, 2007년 한국과학기술한림원주관 젊은과학자상 수상, 2013년 미국국립아카데미 KAVLI-NAS석학, 현재 서울시립대학교 물리학과 교수로 재직 중이며 양자장이론 중력 초끈이론을 연구하고 있다.
(dsbak@uos.ac.kr)

1) 우리는 논의의 편의상 $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ 으로 시공간 좌표를 첨자 수를 이용하여 지칭하기로 한다. 여기서 c 는 진공에서 빛의 속력을 나타낸다. 반면 벡터 기호는 공간 성분만을 포함하는 벡터량을 지칭한다.

알려져 있다. 따라서 게이지장이야말로 QED의 전자기장 부분을 기술하는 기본 물리 변수로 사용되어야만 한다. 그러나 이 게이지장은 또한 여분의 자유도를 포함하는데 이것이 바로 소위 말하는 게이지 변환 대칭성의 문제이다. 즉 전기장이나 자기장은 게이지 변환에 대하여 불변이며 여기서 게이지 변환은 게이지 매개 함수라고 불린다. 이러한 게이지 불변성 원리는 QED나 전자기 상호작용을 포함하여 우리 세상의 기본 상호작용이 가지는 가장 중요한 원리에 해당한다.

장이론의 양자화를 자세히 기술하는 것은 본 글의 성격상 부적합하지만 개략적으로 설명하면 다음과 같다. 즉 양자 전자기장은 공간적으로 분포하는 무한개의 양자 조화진동자의 모임으로 이해할 수 있다. 또한 양자 조화진동자는 생성 소멸 연산자를 이용하여 각각의 양자 상태를 기술할 수 있다. 이때 주어진 파수 \vec{k} 를 이용하여 분해하면 해당 게이지장은 조화진동자를 이용하여 표현할 수 있다. 이때 개략 a_k^\dagger , a_k 는 각각 주어진 파수의 광량자를 진공 상태에서부터 생성 소멸시키는 연산자에 해당한다. 해당하는 광량자의 에너지는 $E = \hbar c k$ 로 주어진다. 즉 광량자는 각진동수가 클수록 비례하여 높은 에너지를 가지며 가시광선의 경우 보라색이 가장 높은 에너지 상태에 해당하며 남색 파랑 초록 노랑 주황의 순으로 낮아지며 빨간색 광량자가 가장 낮은 에너지에 해당한다. 이러한 연산자를 이용하여 임의의 개수의 광량자를 생성할 수 있다. 물론 위의 광량자 상태에 반대로 대응하는 소멸 연산자를 작용시키면 광량자가 차례로 소멸하여 진공 상태로 돌아가게 되며 그 이후에 한차례 더 소멸 연산자를 작용시키면 0이 된다. 또한 만약 특정한 생성 연산자 a_k^\dagger 를 n 번 거듭하여 작용하면 해당 광량자 n 개 상태가 만들어진다. 그러므로 임의의 광량자 상태를 기술할 수 있게 된다. 우리가 보는 빛이나 X선 마이크로파 라디오파 등 모든 전자기파는 모두 이러한 광량자의 모임에 해당한다.

전자 디랙방정식과 양전자

전자나 양전자는 전기 전하를 띠고 있다. 이러한 전자나 양전자의 낮은 에너지 영역은 비상대론적인 기술이 유효하며 이는 비상대론적 슈뢰딩거 방정식으로 비교적 잘 기술된다고 할 수 있다. 그러나 임의의 에너지에서는 상대론과 부합하는 방정식이 필요하고 이것이 바로 디랙이 1928년에 발견한 소위 디랙방정식이다.^[1] 디랙은 기본적으로 다음과 같은 형태를 가정하고

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

위의 로렌츠 대칭성과 부합하도록 네 가지 행렬 γ^μ 를 결정하였다. 디랙은 이 네 가지 행렬이 4×4 행렬로 주어지며 로렌

츠 변환에 대하여 특정 성질을 가짐을 보일 수 있었다. 따라서 파동함수 ψ 는 네 가지 성분을 가지는 열벡터로 표현되어야만 한다. 전자는 이미 당시에 스핀이 1/2로 업과 다운 스핀 두 내부 상태를 가짐이 잘 알려져 있었고 그는 위의 두 가지 성분 ψ_1 , ψ_2 를 전자의 각 스핀 상태에 대응시켰다. 그러면 나머지 성분 ψ_3 , ψ_4 는 무엇에 대응하는 것일까? 디랙은 나머지 성분이 음수 값 에너지를 가짐을 주목하였다. 그는 이러한 음수 에너지 성분이 문제가 있는 것이 아니라 오히려 반입자를 기술함을 발견하였고 이것이 전자의 반입자인 양전자의 이론적 발견에 해당한다. 물론 이 예측은 몇 년 후에 실험적 관측을 통하여 입증되었다. 양전자 또한 스핀이 1/2로 업다운 두 스핀 상태가 가능하다. 디랙의 바다 이론에 따르면 음수 상태를 완전히 전자가 채우고 있는 것이 진공상태이고 음수 상태의 전자가 빈자리 소위 말하는 홀 상태가 양전자를 기술한다는 이론이다. 따라서 양전자는 전자의 반대 전하를 가지고 스핀은 당연히 전자와 같은 값을 갖게 된다. 그러나 이러한 디랙의 바다는 무한히 많은 입자를 가정하고 생성과 소멸을 가정하고 있으므로 더 이상 양자역학적인 기술은 적합하지 않으며 생성과 소멸 연산자에 기초한 양자장론적인 기술을 요구하게 된다. 따라서 위의 ψ 는 전자와 양전자를 기술하는 파울리 배타 원리를 만족하는 페르미장(fermion field)으로 재해석한다. 역시 표준적인 양자화 방법을 거친 후 디랙장을 파수로 푸리에 분해한다. 이때 b_k^\dagger , d_k^\dagger 는 각각 전자와 양전자를 진공으로부터 생성시키는 연산자에 해당하고 b_k , d_k 는 각 전자와 양전자의 소멸 연산자에 해당한다. 파울리 배타 원리를 따라 전자나 양전자가 각각 같은 에너지 상태를 동시에 점유할 수 없게 된다. 전자나 양전자는 동일한 질량을 가진다. 또한 전자와 양전자는 전하량이 각각 $\mp e$ 에 해당하며 여기서 e 는^[2]

$$e = 1.602176565(35) \times 10^{-19} \text{C}$$

로 주어진다.

전자기 상호작용과 결합상수

전술한 바와 같이 고전적으로 전하와 전류는 전자기장을 생

REFERENCES

- [1] Dirac, P. A. M., Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **117**(778), 610 (1928).
- [2] P. J. Mohr, B. N. Taylor and D. B. Newell, "The 2010 CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants" (Web Version 6.0). This database was developed by J. Baker, M. Douma, and S. Kotochigova. Available: <http://physics.nist.gov/constants>. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899 (2011).

성하고 이 전자기장에 의하여 다시 전하를 띤 입자는 영향을 받음으로서 상호작용하게 된다. 이때 전하를 띤 입자의 운동방정식에서 전자기장의 영향은 로렌츠 힘의 모양으로 나타난다. 이러한 전자 양전자를 기술하는 디랙장과 맥스웰 전자기장의 상호작용을 기술하는 항은 어떻게 결정되는가? 이는 전체 시스템의 게이지 변환에 대한 대칭성을 요구함으로써 자연스럽게 결정이 된다. 즉 전하를 띤 입자를 기술하는 디랙장의 미분연산자가 있을 때마다 이를 게이지 변환에 대하여 공변인 미분연산자로 대체하면 이에 따라 상호작용이 결정된다는 것이다. 이러한 방법에 의하여 결정된 상호작용을 최소 결합이라 한다. 이에 따라서 결정되는 상호작용 부분은 완전히 결정되게 된다. 이 상호작용에서 전하량은 보존법칙을 만족하며 항상 보존된다. 이러한 결합은 기본적으로 전자 또는 양전자가 광양자를 방출 또는 흡수하는 상호작용을 기술한다. 또한 전자와 양전자가 만나 광양자로 변환되거나 광양자가 전자와 양전자로 전환되는 반응을 기술한다. 이러한 상호작용과정에서 또한 전체 전하는 보존되는데 이것이 전하량 보존의 법칙이다. 결합상수 e 를 영으로 놓아 상호작용이 없다고 하면 위 시스템은 자유입자를 기술하며 대응하는 장이론도 아주 쉽게 이해할 수 있다. 이 경우 기본적으로 광양자와 전자 양전자가 일정 에너지와 운동량을 가지고 서로 독립적으로 공간을 자유로이 움직이게 된다. 그러나 결합상수가 영이 아닌 경우는 상호작용의 효과로 더 이상 문제는 간단하지 않다. 보통은 소위 말하는 섭동 전개 방법을 통하여 QED 이론을 기술하게 되는데 전개의 매개상수는 소위 말하는 미세구조상수

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137.040}$$

로 주어지며 상호작용의 크기를 나타낸다. 임의의 측정 가능한 물리량은 결합상수를 영으로 하는 상호작용을 무시한 값으로부터 출발하여 미세구조상수의 거듭제곱 항을 보정하는 멱급수 전개로 표현할 수 있다. 그 중 이러한 미세구조상수가 매우 작은 숫자이므로 적어도 몇 개의 항까지 계산한다면 섭동전개의 계산 결과는 일반적으로 매우 정밀하며 아래에서 간략히 설명하겠지만 실험 결과와 대비하여 정밀한 검증이 가능하다. 그러나 이 시리즈는 일반적으로 수렴반경이 영인 점근시리즈라서 비섭동적 결과를 위해서는 새로운 다른 형태의 접근이 필요하다. 이러한 섭동 전개 계산은 여러 가지 어려움에 봉착하게 된다. 첫째는 계산의 복잡성이다. 섭동전개 계산은 일반적으로 계산항의 수가 많고 각 항조차 다중 적분으로 주어져 있어 계산이 일반적으로 매우 복잡하다. 그러나 파인만이 파인만 다이어그램을 섭동 계산 방법으로 개발하여 이러한 복잡한 계산을 간단히 계산하면서도 개념적으로도 쉽게 이해하는 성과를 이루었

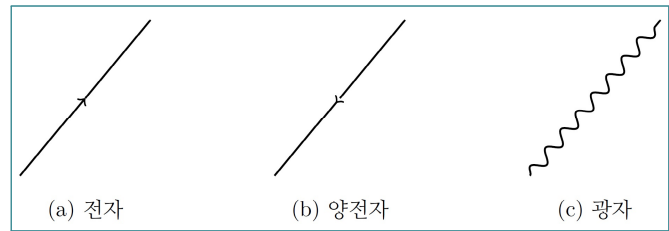


Fig. 1. Propagators of electrons and photons.

으며 현재는 양자장 이론 계산의 표준적인 방법으로 자리매김하고 있다. 이에 아래에 자세히 기술하고 그 물리적 주요 성과를 요약하고자 한다. 두 번째 문제는 무한대의 문제이다. 이 문제는 재규격화를 논의하면서 자세히 다루도록 하겠다.

파인만 도형

양자장 이론에서는 라그랑지안 혹은 이 양의 적분인 액션에 의해 물리이론이 정의된다. QED는 전자와 빛의 양자 현상을 기술하는 양자장론으로서 QED 라그랑지안은 3개의 간단한 부분들로 구성된다. 전자의 스핀, 질량을 표시하는 부분, 광자의 스핀을 표시하는 부분, 그리고 전자와 광자의 상호작용을 기술하는 부분으로 되어 있다. 마지막 부분은 전자의 전하에 비례한다. 앞에서 기술한 대로 실제 이 값은 아주 작아 QED에 기반하는 물리현상을 기술할 때 섭동전개이론에 근거하여 계산할 수 있다. 하지만 QED 초기의 경우, 비교적 간단한 라그랑지안에서 출발하여 자연계에서 일어나는 실제 물리현상—예를 들면 전자와 전자의 충돌 현상—과 관련된 물리량을 계산하고자 하면 상당히 복잡한 과정을 거쳐 계산할 수밖에 없었다. 파인만은 이 과정을 생략할 수 있는 획기적인 방법을 만들었다. 즉 라그랑지안으로부터 파인만규칙을 정하고 물리현상을 직관적으로 표현하는 파인만 도형을 그리는 것이다. 파인만 도형으로부터 수학적 표현을 바로 쓸 수 있고 이 표현을 계산하면 원하는 물리량을 얻을 수 있다.

QED의 경우 전자의 진행은 직선으로 표시하고 광자의 진행은 구불구불한 선으로 표시한다(그림 1). 광자의 진행자는 두 개의 전자진행자와 한 점에서 만난다. 이 점을 버텍스라고 부르고 전자와 광자의 상호작용을 나타낸다. 전자의 진행자도 직선 위에 화살표를 그려 두 가지 경우를 표현하는데, 수직방향은 시간의 진행방향으로 할 경우 위쪽 방향의 화살표를 가진 진행자는 음전자의 진행을 아래 방향의 화살표를 가진 진행자는 양전자의 (위쪽 방향으로의) 진행을 표시한다. 앞에서 설명한 대로 디랙의 방정식은 0보다 큰 에너지 값을 갖는 해와 더불어 0보다 작은 (즉 음수)에너지 값을 갖는 해도 갖는다. 디랙은 이 음수에너지에 해당하는 해로부터 전자의 반입자 (즉

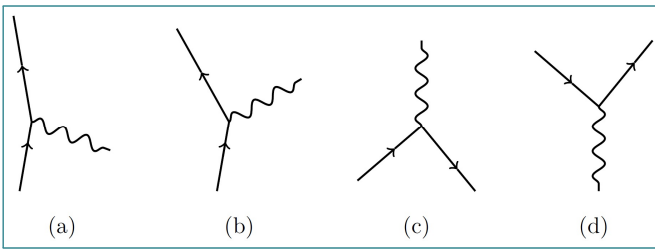


Fig. 2. Feynman diagrams representing interactions between electrons and photons.

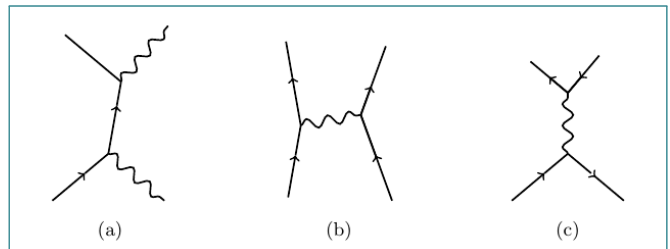


Fig. 3. (a) Electron-photon (b) electron-electron (c) electron-positron scattering.

양전자가 있을 수 있음을 예측하였다. 파인만은 이 반입자(양전자)를 해석하는 또 다른 방법을 파인만 그림을 통하여 제시하였다. 즉, 음의 에너지를 가진 전자가 시간에 대해 역방향으로 진행되는 것이 양전자가 시간에 대해 순방향으로 진행되는 것에 해당한다고 해석했다. 상호작용이 있는 가장 단순한 그림으로 네 가지 그림을 생각할 수 있다(그림 2). 처음 두 그림은 전자가 광자와 작용하면서 진행되는 것을 나타낸다. 첫 번째 그림에서는 광자가 전자를 만나 없어진다. 처음 상태의 전자와 광자의 에너지 합과 운동량의 합은 나중 상태의 전자의 에너지, 운동량과 값이 같아야 한다. 이것은 에너지보존법칙과 운동량보존법칙과 관련이 있는 것으로 모든 벡터스에서 성립한다. 다음 그림은 전자에서 광자가 생성되는 것을 표시한다. 역시 광자 생성 전 전자의 에너지와 운동량은 생성 후 전자와 광자의 에너지 합, 운동량 합과 같다. 세 번째 그림은 전자와 양전자가 만나 소멸하면서 광자를 생성하는 것을, 마지막 그림은 광자로부터 전자와 양전자의 페어가 생성되는 것을 나타낸다. 이 페어 생성은 초기 우주에서 물질이 생성되는 과정을 기술하는데 아주 중요한 역할을 한다.

그림 3의 도형들은 좀 더 실제적인 물리과정을 표시한다. 처음 그림은 전자가 광자와의 충돌을 묘사한다. 광자가 전자에 흡수되어 전자는 베크슈타인 상태가 되었다가 곧 광자를 방출하여 자유전자가 된다. 화살표의 방향을 반대로 한 도형은 반입자, 즉 양전자의 충돌을 표시한다. 이 도형으로부터 산란각에 따른 빛의 강도를 계산할 수 있다. 다음 도형은 전자와 전자의 충돌을 기술하고, 마지막 도형은 전자와 양전자가 소멸되었다가 다시 전자와 양전자를 생성하는 파인만 도형이다. 이때 입사되는 전자와 양전자의 에너지가 충분히 크면 뮤온-반뮤온처럼 다른 소립자들의 쌍을 생성하는 과정에 해당하는 그림이 된다. 사실 입자물리 실험이 이루어지는 가속기에서 소립자들을 생성하는 과정이 이에 해당한다.

이러한 모든 계산들은 실험과 잘 맞았고 QED는 성공적인 이론으로 보였다. 그러나 이론물리학자들은 곧 어려움에 봉착한다. 그림 4에 표시되어 있는 도형들을 계산하고자 하면 관련되어 있는 적분들이 무한대의 값을 갖는 것을 알게 되었다.

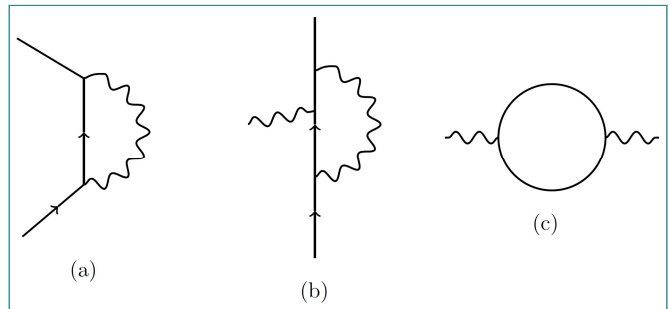


Fig. 4. Simplest Feynman diagrams involving infinities.

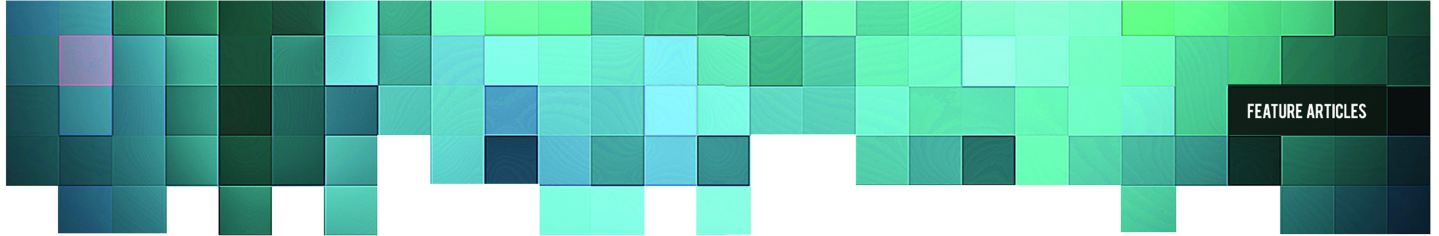
재규격화

이러한 무한대들을 이론에서 제거하고 물리적으로 의미가 있는 유한한 양을 체계적으로 구하는 방법을 재규격화(renormalization)라고 한다. 파인만, 슈윙거, 도모나가는 각각 독립적으로 QED를 재규격화하는 방법을 알아냈고 이 공로로 1965년 공동으로 노벨상을 수상하였다. 재규격화의 기본 아이디어는 라그랑지안에 나타나는 질량, 전하와 같은 파라미터가 직접 물리적으로 측정되는 값이 아니고 이 값과 섭동이론의 파인만 도형에서 나타나는 무한대가 결합된 양이 실제 측정하는 값이라는 점이다. 이 이론의 놀라운 점은 엄청난 갯수의 파인만 도형에서 나타나는 무한대가 섭동이론의 체계에 따라 몇 개의 파라미터의 재규격화에 의해 전부 사라진다는 점이다. 언뜻 보기에는 너무 인위적인 것 같고 얻어지는 유한한 값을 믿을 수 있을까하는 의구심도 들지 모르지만, 이러한 재규격화 이론에 따라 계산한 값과 실험에서 측정한 값은 놀라운 정밀도에서 일치한다. 대표적인 것이 램 천이와 전자의 자기모멘트 값인데 후자의 경우

실험값: $1.00115965218076 (\pm 27)$

이론값: $1.00115965218113 (\pm 86)$

의 정밀도를 보이고 있고, 이는 인류가 만들어낸 이론 중 가장 높은 정밀도에 해당한다.



재규격화 방법에 대한 물리적 사고를 돕기 위해 고체 내부에 있는 전하의 전하를 측정하는 물리적 상황을 생각해보자. 이 경우 고체는 많은 원자나 분자들로 되어 있고 주변에 전기장이 있으면 이에 따라 이 원자나 분자 내부의 전자가 움직여 전기모멘트 값을 갖는다. 앞의 실험 전하도 전기장을 방출하기 때문에 주변의 원자나 분자들이 전기 모멘트를 갖고 이 실험 전하 주변을 둘러싸게 된다. 이렇게 되면 실험 전하를 어느 정도 거리에서 측정하느냐에 따라 전하 값이 달라지게 된다. 이런 효과를 차폐효과 또는 스크린 효과라고 한다. 그림 4(c)의 경우 원은 전자와 양전자가 가상적(virtual)으로 생성되었다가 사라지는 것을 나타내는데 이것이 가상 전기모멘트를 생성한다. 전자의 전하를 측정하고자 할 때 이러한 가상 전기모멘트

가 전하를 둘러 싸 일종의 차폐효과가 발생하여 실험적으로 측정하는 전하와 깊은 곳에 있는 전하 즉 라그랑지안에 나타난 전하가 다르게 된다. 고체의 경우와 다른 점은 이 차이가 무한대라는 점일 뿐이다. 이러한 해석은 우리가 알고 있는 진공이 그렇게 단순하지 않고 아주 복잡한 버추얼 고체에 해당함을 의미한다. 재규격화이론은 그 후 재규격화 군론으로 발전하였고 더불어 스케일에 따라 변하는 결합상수의 개념도 창출하였다. 그 후 발견된 강한 상호작용을 기술하는 QCD 이론의 경우 QED와는 달리 높은 에너지 스케일에서 이 결합 상수가 아주 작아지고 이 상황에서는 QCD에서도 섭동전개이론을 적용할 수 있다는 점이 알려지게 되었다.

